Interrogation rapide n° 1

1 heure

	Cours	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	BONUS
Total	6	4	5	5	2

I Questions de cours

1. Donner la définition de la multiplication dans $\mathbb{C}$.
2. Compléter la propriété ci-dessous.

La multiplication dans $\mathbb{C}$ vérifie, comme dans $\mathbb{R}$, les égalités suivantes :

(a) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \cdots\cdots\cdots\cdots$.

(b) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

(c) $\forall z \in \mathbb{C}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

(d) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \cdots\cdots\cdots\cdots$

z' est appelé $\cdots\cdots\cdots\cdots$

De plus si $z = a + ib$ est un complexe non nul ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a;b) \neq (0;0)$) alors

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

3. Démontrer la propriété : « Soit $z \in \mathbb{C}$, on a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ »

II Exercices

Exercice 1

Donner l'écriture algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = (2i+1)^2$
2. $z_2 = \dfrac{2+5i}{3-4i}$

Exercice 2

Soit les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 2 + 3i$.

Déterminer les formes algébriques de $z + z'$, zz', z^2 et $\dfrac{1}{z^2}$.

Exercice 3

Soit $P(z) = z^2 - 4z + 13$ un polynôme défini sur $\mathbb{C}$.

1. Cette partie n'utilisera pas le théorème vu dans la partie IV du cours.
   (a) Le polynôme P a-t-il des racines dans $\mathbb{R}$? Justifier.
   (b) Justifier que l'on peut écrire, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)^2 + 9$.
   (c) Calculer $(3i)^2$.
   (d) En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme P en produit de polynômes du premier degré.
   (e) En déduire les racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$.
2. Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème vu en cours sur les équations polynômiales du second degré.

BONUS

Soit α un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit la suite (z_n) de nombres complexes par $z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \alpha z_n - i$.

1. Calculer z_1, z_2 et z_3 en fonction de α.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \dfrac{1-\alpha^n}{\alpha - 1} \times i$